



Korešpondenčný seminár z programovania

Leták zimnej časti XXXIX. ročníka

Korešpondenčný seminár z programovania (KSP) je súťaž programátorov – stredoškolákov a mladších – pripravovaná skupinou študentov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Naším cieľom je zdokonaľiť žiakov v programovaní a v algoritmickom myslení.

Riešením súťažných úloh a štúdiom vzorových riešení sa zlepšíš v programovaní a naučíš sa algoritmicky rozmýšľať. Získané poznatky a skúsenosti využiješ v iných súťažiach v programovaní (napríklad pri riešení [Olympiády v informatike](#)), v bežnom živote, počas vysokoškolského štúdia, dokonca aj na prijímacích pohovoroch do zamestnania. Naši riešitelia sa každoročne zúčastňujú a úspešne umiestňujú na medzinárodných olympiádach v informatike (v Austrálii, Taliansku, Kazachstane, Taiwane, ...). Mnoho našich bývalých riešiteľov sa tiež bez ťažkostí zamestnalo v špičkových IT spoločnostiach ako Google, Facebook, ESET, ...

Ak študuješ na strednej škole a zaujíma ťa programovanie, neváhaj a zapoj sa do KSP:

Ako sa zapojiť do KSP?

- **Prečítaj** si zadania. Nájdeš ich v tomto letáku a na našej stránke <https://www.ksp.sk/ulohy>. Každý rok máme zimnú a letnú časť, obe majú dve kolá s ôsmimi úlohami.
- Teš sa, aké sú tento rok pekné úlohy.
- **Vyrieš** úlohy. Nemusíš vyriešiť všetky, nemusíš ich vyriešiť najlepšie ako sa dá. Aj za čiastočné riešenia sa dostávajú body, za každú úlohu za dá získať 0 až 20 bodov.
- Na riešenie úloh jedného kola máš približne dva mesiace a môžeš ich riešiť doma bez toho, aby si niekam cestoval. Termín odovzdania úloh je napísaný aj na našej stránke, aj v PDF zadaniach. Úlohy sa nedajú odovzdávať po termíne, takže si to, prosím, nenechaj na poslednú chvíľu.
- Úlohy rieš samostatne a neprehrádzaj riešenia ostatným riešiteľom. Odpisovanie riešení a prezradenie riešení pred termínom kola je porušením pravidiel KSP. Po skončení kola sa, samozrejme, o riešeniach rozprávať môžeš. :)
- **Odozdaj** riešenia úloh. Odkaz na odovzdávanie úloh nájdeš pod webovým zadaním každej úlohy alebo na stránke <https://www.ksp.sk/odovzdavanie>. Na odovzdávanie sa treba prihlásiť, aby sme vedeli, komu máme dať body.
 - Vo väčšine úloh odovzdávaš program a popis.
 - Program je hneď po odovzdaní otestovaný testovačom a hneď vidíš, koľko bodov za program máš. Program môžeš odovzdávať znova a znova, až kým nie si spokojný s výsledkom. Ak nevieš, ako majú vyzeráť odovzdané programy, pozri si <https://www.ksp.sk/odovzdavanie-programov>
 - Do popisu slovne napíšeš, ako tvoje riešenie funguje, prečo funguje a tiež odhad časovej a pamätovej zložitosti programu. Viac sa dozvieš na stránke <https://www.ksp.sk/ako-riesit>. Popis opraví a obodujú vedúci KSP po skončení kola.
- Po skončení kola si **prečítaj vzorové riešenia** úloh (veľa sa z toho naučíš), pozri svoje opravené popisy (či ti tam vedúci nenapísali nejaké poučné komentáre), pozri sa do výsledkovky a **teš sa**, koľko máš bodov. Vo výsledkoch sa hodnotí samostatne letná a zimná časť. V každej časti je dôležitý celkový súčet bodov.
- Prečo sa máš tešiť z bodov? Čítaj ďalej.

Čo môžem vyhrať?

- Okrem neoceniteľných vedomostí, skúseností a zručností, ktoré získaš pri riešení semináru, môžeš vyhrať množstvo skvelých vecí.
- Všetci víťazi od nás dostanú **vecné ceny**.
- Pre 36 najlepších riešiteľov organizujeme každoročne dve týždenné **sústredenia**. Sústreďenie je niečo ako tábor, na ktorom spoznáš nových priateľov s podobnými záujmami, naučíš sa čosi viac nielen o programovaní a zažiješ kopec zábavy. Sústreďenia sú fakt skvelé akcie, najmä, keď ich organizuje Trojsten.

- Aby ste sa mohli pochváliť ostatným, akí ste šikovní, víťazom všetkých levelov udelíme a pošleme **diplomy**.
- Aj keď sa nedostaneš medzi víťazov, stále môžeš byť úspešným riešiteľom. Úspešný riešiteľ je ten, kto získal aspoň polovicu bodov počas celej časti (letnej, či zimnej).

Pravidlá a levely

Počnúc tridsiatym piatym ročníkom rušíme staré kategórie a prechádzame na nový systém *levelov*.

Každý riešiteľ má level, číslo od 1 po 4. Noví riešitelia začínajú na leveli 1 a pokiaľ sa im v riešení darí, level im postupne rastie. Svoj level si môže každý riešiteľ pozrieť na našej stránke. Riešiteľom s levelom L sa započítavajú body len za úlohy s číslami L až 8.

Vo výsledkových listinách (<https://www.ksp.sk/vysledky>) sa každému riešiteľovi počíta **5 najlepšie vyriešených úloh**. Celkovo sa dá za časť (dve kolá) získať 200 bodov. Riešitelia, ktorí sa v nejakej výsledkovke umiestnili na jednom z prvých dvoch miest a majú aspoň 150 bodov sú **víťazi**. Najlepších 36 riešiteľov pozývame na sústreďenie.

Podrobnejšie pravidlá si môžete prečítať na <https://www.ksp.sk/pravidla>.

Registrácia

Pred odovzdaním riešenia je potrebné sa zaregistrovať na našej webstránke a vyplniť požadované kontaktné údaje. Odporúčame sa zaregistrovať aspoň pár dní pred odovzdávaním riešenia (pre prípad, že by ste mali počas registrácie nejaké problémy).

Účastou v KSP nám dávate súhlas spracovať a archivovať údaje, ktoré nám poskytnete pri registrácii, ako aj zverejniť vaše meno, školu, ročník a získané body vo výsledkovej listine.



Úlohy 1. kola zimnej časti

Termín odoslania riešení tohto kola je pondelok **1. novembra 2021**. Doprogramovávanie končí v pondelok 15. novembra 2021.

1. Veľmi pokazená tlačiareň

12 b za popis, 8 b za program

Od neskorého večera do neskorého rána, tlačiarne v T2 tlačila. Mišof a Hodobox vstúpili dnu. Po chvíli skúmania zistili, že vytlačené sú iba dva druhy obrázkov. Mišofovi hneď napadlo, že by časť, alebo aj všetky obrázky mohli použiť na oblepenie stien. A tak sa s Hodoboxom zhodli, že na vyfarbenie každého obrázku použijú béžovú, ružovú a modrú. Z týchto farieb však mali obmedzený počet voskoviek, ktoré mohli použiť na vyfarbovanie obrázkov. A preto chcú zistiť, koľko najviac obrázkov dokážu vyfarbiť.

Úloha

Mišof s Hodoboxom Vám povedali, koľko majú voskoviek jednotlivých farieb. Pre oba typy obrázka viete, koľko voskoviek ktorej farby potrebujú na jeho vyfarbenie.

Vašou úlohou je povedať, koľko najviac obrázkov Mišof a Hodobox dokážu vyfarbiť.

Formát vstupu

Na prvom riadku vstupu sú 3 medzerou oddelené prirodzené čísla b, r, m – počet béžových, ružových a modrých voskoviek, ktoré majú Mišof s Hodoboxom k dispozícii.

Nasledujú dva riadky. V i -tom z nich sú čísla b_i, r_i, m_i – počty voskoviek jednotlivých farieb, ktoré sa spotrebujú na jeden obrázok typu i .

Formát výstupu

Na jediný riadok výstupu vypíšete najväčší počet obrázkov, ktoré vedú Mišof a Hodobox vyfarbiť.

Hodnotenie

Sú 4 sady vstupov. Platia v nich nasledovné obmedzenia:

Sada	1	2	3	4
$1 \leq b, r, m \leq$	100	10 000	100 000	1 000 000
$1 \leq b_i, r_i, m_i \leq$	300	30 000	300 000	3 000 000

Príklad

vstup

```
6 6 6
1 2 2
2 1 1
```

výstup

```
4
```

Mišof a Hodobox vyfarbia po dva obrázky z každého druhu.

vstup

```
3 4 5
1 1 1
2 2 2
```

výstup

```
3
```

V tomto prípade vedú vyfarbiť 3 obrázky prvého druhu.

2. Obmenené zátvorky

12 b za popis, 8 b za program

Malý Marcelko je introvert, a tak si v škôlke spestruje dni tým, že len veľmi z diaľky pozoruje svojich

spolužiakov, keď si kreslia voskovkami. Keďže sa zatiaľ naučil počítať iba do 4, pozoruje, čo sa deje počas kreslenia s týmito 4 druhmi voskoviek – guľatou, kučeravou, špicatou a hranatou (voskovky si môžeme predstaviť ako príslušné zátvorky). Jeho novou zábavkou je písať si na papier záznamy o tom, čo sa deje s ktorou voskovkou. Na papier napíše otváraciu – ľavú zátvorku (príslušného typu), keď si nejaký spolužiak danú voskovku vezme zo stolíka. Naopak, keď ju položí na stolík, zapíše si zatváraciu – pravú zátvorku (príslušného typu). Na začiatku a na konci dňa sa všetky voskovky nachádzajú na stole. Občas sa ale Marcel zadáva na Sabinku a zabudne zapisovať niektoré zobratia alebo položenia voskoviek, alebo zapíše nejaké zobratia a položenia zle. Potom mu vznikajú všelijaké čudné zápisy a je smutný, lebo si nie je istý, či niečo nezmeškal. Pomôžte mu overiť, či jeho zápis mohol vzniknúť zapisovaním pohybov voskoviek, alebo nie.

Úloha

Na vstupe dostanete počet jednotlivých druhov voskoviek a postupnosť zátvoriek. Vašou úlohou je zistiť, či pri danom počte druhov voskoviek mohol na konci dňa, keď všetky deti vrátili svoje voskovky, tento zápis nastať alebo nie.

Formát vstupu

Na prvom riadku vstupu dostanete 4 čísla: g, k, s, h , kde g je počet guľatých, k je počet kučeravých, s je počet špicatých a h je počet hranatých voskoviek, ktoré majú v škôlke. Platí, že $0 \leq g, k, s, h \leq 5000$.

Nasleduje 1 riadok obsahujúci neprázdnu postupnosť zátvoriek. Dĺžka tejto postupnosti je najviac 200 000.

Formát výstupu

Vypíšte jediný riadok obsahujúci buď refazec ANO ak je záznam korektný, alebo refazec NIE ak záznam nie je korektný a teda Marcel musel pri obzeraní Sabinky zmeškať nejaké polozenie, zobratie voskovky, alebo nejaké zapísal zle. Nezabudnite na koniec vypísať znak konca riadku.

Príklad

vstup

```
1 1 1 1
([<])>
```

výstup

```
ANO
```

V škôlke majú z každého druhu voskoviek jeden kus a takýto zápis mohol nastať tak, že zo stola postupne zobrali guľatú, hranatú, kučeravú a špicatú voskovku a následne ich v rovnakom poradí vrátili.

vstup

```
1 0 0 0
[()]
```

výstup

```
NIE
```

V škôlke majú iba guľatú voskovku a tu hneď na začiatku podľa zápisu niekto zobral hranatú, ktorú ale v škôlke nemajú.

vstup

```
1 0 0 0
(( ))
```

výstup

```
NIE
```

V škôlke majú iba jednu guľatú voskovku, ale podľa tohto zápisu sa zo stola najprv zobrali dve guľaté bez toho, aby sa medzi nimi nejaká položila.

vstup

```
2 0 0 0
(( ))
```

výstup

```
NIE
```

V škôlke majú dve guľaté voskovky ale v tomto zápise nám chýba polozenie jednej voskovky.

3. Strašná kopa papierov

12 b za popis, 8 b za program

Paulínka sa v detstve najradšej hrávala s voskovkami. V jej škôlke mali na hranie práve dve veci:

- veľa voskoviek v rade za sebou,
- veľa kôp papierov v rade za sebou.

Nemožno sa teda čudovať, že jej zábava, povedzme si na rovinu, nebola práve najintelektuálnejšia – celý deň si brala voskovky v poradí, v akom boli na stole, a vždy, keď si vzala nejakú voskovku, nepustila ju z rúk, až

kým ju celú nevypísala. Toto robila, až zafarbila všetky papiere v škôlke. Takto jej často vznikali jednofarebné obrázky a tie sa Paulínke až tak nepáčia. Vedeli by ste zistiť, koľko z jej obrázkov bolo viacfarebných?

Úloha

Paulínka má n voskoviek rôznych farieb, každá má svoju dĺžku d_i a m kôpok papierov. V každej kôpke sa nachádza k_i rovnakých čistých papierov. Na zafarbenie jedného papiera z i -tej kôpky potrebuje Paulínka c_i dĺžky voskovky/voskoviek. Paulínka vždy vyfarbí jeden celý papier a až potom prejde na ďalší. Papiere si berie poporadí, teda vždy vyfarbí celú kôpku pred tým, ako začne brať papiere z ďalšej. Voskovky si berie tiež poporadí, a vždy až potom, ako sa jej predošlá voskovka vypíše.

Zistite, koľko obrázkov bude obsahovať viac než jednu farbu.

Je zaručené, že voskovky stačia na pokreslenie všetkých papierov.

Formát vstupu

Na prvom riadku vstupu dostanete číslo n – koľko rôznych voskoviek má Paulínka. Nasleduje n riadkov, kde každý riadok obsahuje celé číslo d_i – dĺžku i -tej voskovky. Ďalší riadok obsahuje číslo m – počet kôpok papierov. Nasleduje m riadkov, kde i -ty riadok obsahuje dve celé čísla k_i a c_i , kde k_i znamená počet papierov v i -tej kôpke a c_i je celková dĺžka voskovky, ktorú treba na zafarbenie jedného papiera v i -tej kôpke.

Obmedzenia

Sú 4 sady vstupov.

V prvých dvoch sadách platí, že $n \leq 10\,000$, $m \leq 1000$, $d_i, c_i, k_i \leq 1000$ a suma dĺžok voskoviek je menej ako 2 000 000.

V druhých dvoch sadách platí, že $n \leq 1\,000\,000$, $m \leq 200\,000$, $d_i, c_i, k_i \leq 200\,000$ a suma dĺžok voskoviek je menej ako 50 000 000 000.

Formát výstupu

Vypíšte jedno celé číslo – počet obrázkov, ktoré budú viacfarebné.

Príklad

vstup

```
2
5
5
1
2 5
```

výstup

```
0
```

Paulínka má dve voskovky, obe dĺžky 5. Má jednu kôpku papierov, kde sú dva papiere, pre každý treba 5 dĺžok voskoviek. Prvou voskovkou zafarbí prvý papier, druhou druhý. Ani jeden papier nie je viacfarebný.

vstup

```
2
4
6
2
1 6
1 4
```

výstup

```
1
```

Teraz má Paulínka dve voskovky, jednu dĺžky 4 a druhú dĺžky 6. Má dve kôpky papierov, v oboch je po jednom papieri. Na zafarbenie prvého papiera treba 6 dĺžok voskoviek. Na zafarbenie druhého papiera treba 4 dĺžok voskoviek. Keďže papiere aj voskovky Paulínka berie po poradí, tak prvou voskovkou zafarbí 4 dĺžky prvého papiera a zvyšok prvého a celý druhý zafarbí druhou voskovkou.

vstup

```
4
1
1
1
1
1
1 3
```

výstup

```
1
```

V tomto prípade má Paulínka štyri voskovky, všetky dĺžky 1. Má jednu kôpku papierov, kde je iba jeden papier, a na jeho zafarbenie treba 3 dĺžky voskoviek. Tri voskovky minie na zafarbenie tohoto jediného papiera, a jedna jej ostane nepoužitá. Rôznofarebný papier je teda jeden.

4. Kruhovú knižnica

12 b za popis, 8 b za program

V základnej škole Kráľa Svätopluka Prvého majú obrovskú knižnicu. Je to veľká kruhová miestnosť, v ktorej je pozdĺž stien nad sebou umiestnených n dlhých polic. Každá polica je kruhová a ide kolom dokola celej miestnosti. (Samozrejme, sú tam aj dvere, takže nejde úplne dokola, ale tie pre túto úlohu nie sú zaujímavé.) Každú policu si teda môžeme predstaviť ako kružnicu.

Na každú policu sa vojde s kníh, pre jednoduchosť majú všetky rovnakú šírku. Na každej z nich je zároveň práve jedna (špeciálna) červená kniha. Medzi inými je tam aj Červená algebra, no sú tam aj knihy, ktoré sú červené len preto, že ich obaly nespolušní žiaci zafarbili voskovkami.

Úloha

Knihovníkovi sa nepáči, ako sú červené knihy na náhodných miestach a nepríjemne to bije do očí. Bol by rád, keby sa všetky červené knihy nachádzali nad sebou v jednom stĺpci. Zároveň by chcel, aby sa knihy presunuli o čo najmenšiu celkovú vzdialenosť.

Vzdialenosť meriame po polici popri stene (teda nie krížom cez miestnosť). Knihy nie je možné meniť medzi policami (každá kniha musí ostať vo svojej polici). Celkovú vzdialenosť dostaneme tak, že sčítame vzdialenosť, o ktorú sa posunula kniha na každej polici. Knihovník si môže vybrať, ktorým smerom chce knihu posúvať (doľava alebo doprava).

Pozície, na ktorých sú knihy, si môžeme očíslovať od 0 do $s - 1$, pričom susedné pozície sú vždy i a $i + 1$, ale aj 0 a $s - 1$ (policie sú kruhové). Ak napríklad máme policu s dĺžkou na $s = 16$ kníh a chceme premiestniť červenú knihu z pozície 4 na pozíciu 13, môžeme ju posunúť v smere rastu čísel (doprava) o 9 pozícií ($13 - 4 = 9$). Lepšie je však posunúť ju opačným smerom, takto prekoná vzdialenosť iba 7 pozícií (vzdialenosť 4 na pozíciu 0 a $16 - 13 = 3$ na pozíciu 13).

Pomôžte knihovníkovi nájsť optimálny spôsob premiestnenia kníh.

Formát vstupu

Na prvom riadku dostanete čísla n a s – počet polic v knižnici a veľkosť jednej police.

Na druhom riadku sa nachádza n celých čísel z rozsahu od 0 do $s - 1$ – pozície červenej knihy v jednotlivých policiach.

Formát výstupu

Vypíšte jedno číslo – najmenšiu celkovú vzdialenosť, o ktorú je potrebné červené knihy presunúť. Nezapudnite na znak konca riadka.

Hodnotenie

Sú štyri sady vstupov. Platia v nich nasledovné obmedzenia:

Sada	1	2	3	4
$1 \leq n \leq$	8	1000	100 000	100 000
$1 \leq s \leq$	16	2000	100 000	10^9

Príklad

vstup

```
5 5
0 1 2 3 4
```

výstup

```
6
```

Knižnica má 5 polic, každá má veľkosť 5. Rozmiestnenie kníh vyzerá takto (X je červená kniha):

```
|X....|
|.X...|
|..X..|
|...X.|
|....X|
```

Police sú kruhové, teda pravý okraj je napojený na ľavý. Jedno možné riešenie je presunúť všetky knihy do stĺpca (na pozície) 2, v jednotlivých riadkoch teda vykonáme presuny o 2, 1, 0, 1 a 2 pozície, dokopy je to 6. V tomto prípade sme kruhovosť nevyužili, ale rovnako dobre ju využiť vieme a na 6 krokov presunúť všetky knihy do stĺpca 0 či ktoréhokoľvek iného.

vstup	výstup
3 10 0 0 8	2

Knihu v tretej polici posunieme o dve pozície vpravo, čím sa dostane z pozície 8 cez pozíciu 9 na pozíciu 0.

```
|X.....|
|X.....|
|.....X|
```

vstup	výstup
2 5 2 3	1

Knihy sú v susedných stĺpcoch, stačí jednu presunúť k druhej.

```
|..X..|
|...X|
```

5. Okno do študentovej duše

12 b za popis, 8 b za program

Miško by si mal robiť domácu. A ísť postrúhať mrkvu. A už niekedy konečne pozrieť zo záznamu minulo-týždňovú prednášku z toho či onoho predmetu. A pozbierať si zo sušiaka prádlo, nech sa dá prať ďalšia várka. A upratať po mačke, ktorá podľa zvuku práve zase na chodbe nagrcala. List povinností pokračuje ďalej a ďalej.

Čím je povinností viac, tým sa do nich Miškovi menej chce. A tak si radšej skúma najnovšiu matematickú zaujímavosť, na ktorú práve narazil: správanie sa ciferných súčínov keď ich robíme opakovane.

Začnime napríklad z čísla 47. Jeho ciferný súčin je $4 \times 7 = 28$. Ciferný súčin čísla 28 je $2 \times 8 = 16$. Ciferný súčin čísla 16 je $1 \times 6 = 6$. No a odkedy sme sa dostali k jednocifernému číslu, už je to nuda: ciferným súčinom jednociferného čísla je ono samo. Ak teda časom dosiahneme jednociferné číslo, celý postup ukončíme.

Niekedy je tento proces rýchlejší, inokedy pomalší. Napríklad číslo 987654321 má ciferný súčin $9! = 326880$ a číslo 326880 má ciferný súčin 0. Hoci sme začali s oveľa väčším číslom ako v predošlom príklade, skončili sme skôr. A možno sa niekedy stane aj to, že pre nejaký začiatok vôbec nikdy neskončíme na jednocifernom čísle. Alebo žeby sa to predsa len nemohlo stať? O tom Miško zatiaľ nič netuší.

Miško sa rozhodol, že niektorým nezáporným celým číslam priradí *skóre*, a to nasledovne:

- Každé jednociferné číslo n dostane priradené Miškom zvolené malé nezáporné skóre z_n .
- Ak má viacciferné číslo n ciferný súčin $s(n)$ a číslo $s(n)$ má skóre x , číslo n dostane skóre $x + 1$.

Úloha

Na vstupe dostanete hodnoty z_0 až z_9 a tiež cieľové skóre c . Vašou úlohou je nájsť **najmenšie** nezáporné celé číslo, ktoré má skóre c .

Poriadne si pozrite obmedzenia pre veľkosť vstupu.

Formát vstupu

V prvom riadku vstupu sú čísla z_0 až z_9 , v druhom je číslo c .

Formát výstupu

Vypíšte jeden riadok a v ňom jedno číslo – najmenšie nezáporné celé číslo so zadaným skóre.

Obmedzenia a hodnotenie programov

Obmedzenia použité v testoch sme zvolili tak, že v každom teste správna odpoveď **existuje** (toto nie je úplne zjavné) a navyše vždy platí, že má hodnotu nanajviš 10^{18} (toto už vonkoncom nie je zjavné ale tiež je to pravda). Tieto predpoklady môžete využiť vo svojich riešeniach.

Sú štyri sady vstupov. Vo všetkých štyroch platí:

- hodnoty z_i sú z rozsahu od 0 po 3

- ak označíme $m = \max z_i$, tak každú z hodnôt od 0 po m má aspoň jedno z_i
- c je z rozsahu od 0 po 11

Navyše v prvej sade platí, že odpoveď je nanajvyš 1000, v druhej sade platí, že odpoveď je z rozsahu od 1000 po 1 000 000 a v tretej sade platí, že všetky z_i sú rovné nule.

Hodnotenie popisov

Pri hodnotení popisu nezáleží na asymptotickej zložitosti vášho riešenia (keďže všetky čísla na vstupe sú veľmi malé). Lubovoľné riešenie dost efektívne na to, aby získalo body za vstupy, môže dostať do 10 bodov za dôkaz toho, že dáva vždy korektný výstup. Posledné dva body sa budú udeľovať za efektívnosť hľadania.

Príklady

vstup	výstup
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2	11

- Číslo 0 má skóre 0.
- Čísla od 1 po 9 majú skóre 1.
- Číslo 10 má ciferný súčin 0, a keďže 0 má skóre 0, tak 10 má skóre 1.
- Číslo 11 má ciferný súčin 1, a keďže 1 má skóre 1, tak 11 má skóre 2.

vstup	výstup
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3	39

- Číslo 4 má skóre 0, číslo 14 má ciferný súčin 4 a teda skóre 1, číslo 27 má ciferný súčin 14 a teda skóre 2, no a číslo 39 má ciferný súčin 27 a teda skóre 3.
- Žiadne menšie číslo ako 39 nemá skóre 3.

vstup	výstup
2 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2	0

vstup	výstup
2 1 2 2 1 1 1 0 1 0 6	268

6. Výtvarný ateliér

12 b za popis, 8 b za program

Adam a Samo mali už odjakživa vzťah k výtvarnému umeniu, aj keď sa mu nevenujú profesionálne. Obaja išli na vysokú školu študovať nejakú odnož informatiky, no každý na inej univerzite a v inej krajine. Počas svojho štúdia sa aktívne podieľajú na príprave Korešpondenčnej Súťaže Papieroskladania. Keď sa ale naskytila ďalšia aktivita spojená s umením, neváhali a išli do toho.

V rámci medzinárodného a medziuniverzitného projektu výtvarného ateliéru Adam a Samo spolupracujú na vytváraní farebných ozdobných reťazí. Ide o reťaze, ktorých oká sú vyrobené z farebného papiera, pričom farieb je 26. Lenže, obaja už dokončili reťaze, keď zistili, že reťaze by mali byť vlastne rovnaké!

Adam je ale momentálne zahľtený inými povinnosťami, tak ostáva na Samovi, aby svoju reťaz patrične upravil. Poradte mu, ako má upraviť svoju reťaz!

Úloha

Máte dve reťaze - Adamovu a Samovu. Reťaz má daný začiatok a koniec (neviete ju teda otočiť). Je opísaná postupnosťou farieb ôk od jej začiatku po koniec. Samo má k dispozícii nožnice, fixky, a dokonca aj predpripravené kusiská reťazí, takže vie buď:

- odstrihnúť súvislú časť reťaze a spojiť odstrihnuté miesta dokopy. Reťaz nemôže byť v procese obrátená!
– z $abcd$ tak môže vzniknúť acd , bcd , bc ale nie adc alebo cda

- vložiť nejaký súvislý kus reťaze medzi dve oká (alebo na koniec alebo začiatok reťaze)
 - z $abcd$ tak môže vzniknúť $abbbcd$, alebo $aefgbcd$, alebo $kspabcd$
- prefarbiť oko na inú farbu
 - z $abcd$ tak môže vzniknúť $abce$

Tieto operácie vie Samo ľubovoľne kombinovať.

Chcel by ale, aby bol s výsledkom spokojný. Napríklad so svojou pôvodnou reťazou bol spokojný a je smutný, ak ju musí upravovať. Spokojnosť Samo kvantifikuje nasledovne:

- Za každé nezmenené oko (neodstránené, ani neprefarbené) je o m bodov spokojnejší
- Za každý súvislý odstránený úsek je o d bodov menej spokojný.
- Za každý súvislý vložený úsek je o i bodov menej spokojný.
- Za každé prefarbenie oka je o r bodov menej spokojný.

Čísla i a r sú konštanty a nezávisia od dĺžky vloženého, respektíve odstráneného úseku.

Farieb existuje 26 a sú označené malými písmenami anglickej abecedy. Zistite, ako najviac spokojný môže Samo zostať, a nejaký spôsob, ako môže svoju reťaz upraviť.

Formát vstupu

V prvom riadku vstupu sa nachádzajú štyri čísla:

- číslo, o koľko bude spokojnejší za každé nezmenené oko, m
- cena odstránenia súvislej časti ôk d ,
- cena vloženia súvislej reťaze ôk i
- cena prefarbenia oka r .

Nasledujú dva riadky. V prvom z nich sa nachádza popis Samovej reťaze a na druhom popis Adamovej reťaze. Oba popisy sú reťazec z malých písmen anglickej abecedy.

Platí, že reťaze nepresahujú dĺžku 5 000 a $0 \leq m, d, i, r \leq 100\,000$.

Formát výstupu

Vypíšete jeden riadok: najväčšiu spokojnosť, ku ktorej sa vie Samo dopracovať.

Hodnotenie

Úloha má štyri sady. Maximálne dĺžky reťazí v nich budú postupne 500, 2 000, 2 000 a 5 000.

V druhej sade, navyše platí, $d = i = r = 0$, teda Samo nestráca žiadnu spokojnosť.

Príklady

vstup

```
1 2 2 1
abccb
accba
```

výstup

```
0
```

Samo by mal vymazať prvé oko s farbou 'b' zo svojej reťaze, a pridať oko s farbou 'a' na koniec. Takto sa štyroch svojich ôk nedotkne (+4 body spokojnosti), a raz odstráni 'b' (-2 body) a raz pridá 'a' (-2 body). Všimnite si, že napriek tomu, že je prefarbenie lacnejšie, než vymazanie, neoplatí sa mu.

vstup

```
3 2 2 1
asdffflp
kpfffor
```

výstup

```
3
```

Samo by mal vymazať 'asd' zo začiatku svojej reťaze a pridať tam 'kp'. Na druhej strane, mal by 'lp' zmeniť po jednom na 'or'. Takto bude $-2 - 2 + 3 + 3 + 3 - 1 - 1 = 3$ bodov spokojný

vstup

```
1 1 1 10
kms
ksp
```

výstup

```
0
```

Samo nechce prefarbovať. Najlepšie mu je teda vystrihnúť preč m a prídanie p

vstup

výstup

```
10 1 1000 100
kspooksp
kspkspksp
```

```
-240
```

Samo tu potrebuje zmeniť 'ooo' na 'ksp'. Prídanie mu výrazne uberá na spokojnosti, tak radšej ich po jednom prefarbí.

7. Kreslenie stromov

12 b za popis, 8 b za program

“Let’s make some happy little trees,” povedal Bob Ross¹ a začal kresliť stromy na plátno. Inšpirovaná týmto známym umelcom, zobrala Paulínka svoje obľúbené voskovky a začala kresliť stromy na papier.

Paulínka rada kreslí zakorenené informatické stromy, a aby bol výsledný obrázok čo najkrajší, musia byť všetky stromy rôzne a zároveň musia všetky pochádzať z rovnakého materského stromu. (Potom môže obdivovateľom umenia hovoriť, že stromy majú spoločnú dušu.) V časti úloha hneď vysvetlíme, čo to znamená.

Pomôžte Paulínke zistiť, koľko najviac stromov, môže nakresliť, aby splnila želané podmienky. A nezabudnite, keby sa vám to aj na prvý pokus nepodarilo, Bob Ross má pre vás jednu múdrosť: “We don’t make mistakes, we have happy accidents.”

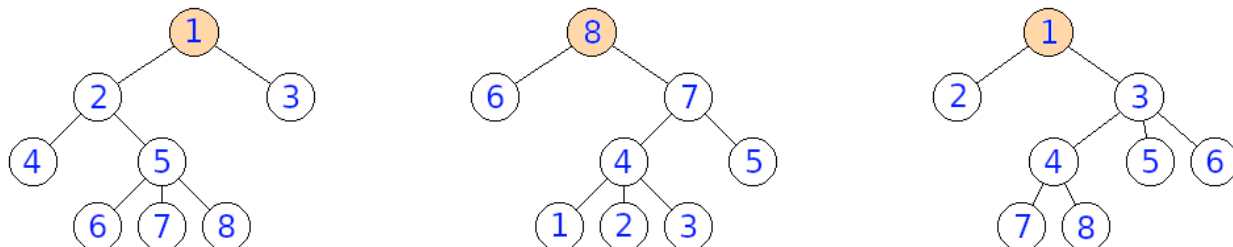
Úloha

Informatický strom (ďalej len *strom*) je množina n vrcholov a $n - 1$ hrán, taká, že z každého vrcholu do každého vedie práve jedna cesta. *Zakorenený informatický strom* (ďalej len *zakorenený strom*) je strom, v ktorom sme jeden vrchol vybrali ako koreň.

Zo stromu vieme vytvoriť n zakorenených stromov tak, že postupne označíme každý z n vrcholov ako koreň (viď obrázok pri prvom príklade vstupu).

Pre tieto zakorenené stromy si zavedieme nový pojem, *rovnakosť*, ku ktorému opačný pojem je *rôznosť*. Zakorenené stromy budeme volať *rovnaké*, keď sa líšia len v označení vrcholov a v poradí synov každého vrcholu. T.j. pokiaľ dovoľíme ľubovoľne prehadzovať poradie synov, vieme pretvoriť jeden strom na druhý. Pokiaľ sa takto nedajú pretvoriť, tak uvažujeme, že sú stromy *rôzne*.

Formálna definícia by mohla byť nasledovná: Dva zakorenené stromy voláme *rovnaké*, ak existuje bijektívne zobrazenie³ f vrcholov jedného stromu na vrcholy druhého stromu, také že pre všetky x, y platí, že x je otec y práve vtedy, keď $f(x)$ je otec $f(y)$.



Na obrázkoch môžeme vidieť príklady troch stromov, z ktorých prvé dva sú *rovnaké* a tretí je od oboch *rôzny*. Zobrazenie, ktoré spĺňa formálnu definíciu je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 8, 7, 6, 5, 4, 1, 2, 3$, ale aj $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$

Na vstupe máte zadaný strom. Vypíšte koľko najviac navzájom *rôznych* zakorenených stromov môžeme dostať označením niektorého vrcholu tohto stromu ako koreň.

Formát vstupu

Na prvom riadku vstupu sa nachádza číslo n – počet vrcholov zadaného stromu. Vrcholy sú očíslované 1 až n .

Na nasledujúcich $n - 1$ riadkoch su vymenované hrany zadaného stromu, na každom riadku sú čísla dvoch vrcholov, a_i, b_i , ktoré táto hrana spája. $1 \leq a_i, b_i \leq n$

¹Príklad Bobovej tvorby nájdete na youtu.be/0n4f-VDjOBE².

³každému vrcholu prvého stromu je priradený práve jeden vrchol z druhého stromu

Formát výstupu

Na výstup vypíšete jedno číslo – počet rôznych zakorenených stromov, ktoré dostaneme, ak postupne každý z vrcholov označíme ako koreň.

Hodnotenie

Je 8 sád vstupov. Platia v nich nasledovné obmedzenia:

Sada	1	2	3	4	5	6	7	8
$2 \leq n \leq$	10	100	100	1 000	1 000	50 000	100 000	300 000

Príklady

vstup

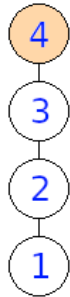
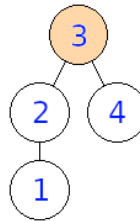
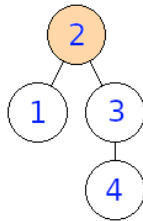
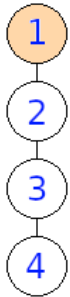
```
4
1 2
2 3
3 4
```

výstup

```
2
```

Ak strom zakoreníme za prvý alebo posledný vrchol, dostaneme rovnaký strom. Podobne dostaneme rovnaké stromy, ak ho zakoreníme za druhý alebo tretí. Vieme teda nakresliť dva rôzne zakorenené stromy.

Na obrázku nižšie môžeme vidieť, aké stromy dostaneme, pokiaľ zakoreníme vstupný strom postupne vo vrcholoch 1, 2, 3, 4



vstup

```
11
1 2
2 3
3 4
4 5
4 6
4 7
5 10
10 9
10 8
7 11
```

výstup

```
10
```

vstup

```
7
7 1
7 2
3 2
7 4
5 4
6 5
```

výstup

```
7
```

8. Absurdistanské diaľnice

12 b za popis, 8 b za program

V Absurdistane majú už dlho v pláne postaviť novú sieť diaľnic. Ale viete, ako to chodí: každé štyri roky sú voľby, s ktorými príde nový minister dopravy. Ten vždy najprv preplánuje celú diaľničnú sieť a potom už

do konca volebného obdobia nič nestihne. Následne príde nový minister a taktiež nanovo prerobí celé plány. Predchádzajúci minister si však rok pred voľbami povedal, že túto tradíciu poruší a diaľnicu stavať naozaj začne. Lenže žiadnu cestu za rok nepostaví, a preto, aby po ňom niečo ostalo, rozhodol sa postaviť aspoň diaľničné križovatky.

Preto zobral svoje plány a náhodne z nich vybral pár miest kde sa do volieb postavili križovatky.

Po ňom však prišiel nový minister. Ten podľa zvyku staré plány zahodil a teraz má pred sebou ťažkú úlohu: musí naplánovať celú diaľničnú sieť tak, aby dopĺňala už existujúce križovatky. Keďže chce mať v plánoch poriadok, určil si nasledujúce dva ciele: musí použiť čo najmenej rôznych diaľnic a všetky z nich musia ísť buď v severo-južnom alebo západo-východnom smere. Dokážete aj vy za takýchto podmienok zostrojiť nový plán diaľnic?

Úloha

Na vstupe dostanete zoznam všetkých diaľničných križovatiek postavených predchádzajúcim ministrom.

Vašou úlohou je navrhnúť diaľničnú sieť tak, aby obsahovala všetky tieto križovatky.

Cez každú križovatkú musia prechádzať dve diaľnice (keď už je tam ten nadjazd, je to už vybudovaná diaľnica a teda ju nemožno zrušiť), môžu však byť akokoľvek krátke (stačí keď sa diaľnica končí hneď za nadjazdom). Žiadne dve diaľnice sa nemôžu križovať mimo križovatky (to by bolo divné, nie?). Nemôžete postaviť žiadnu novú križovatkú, lebo na to nemáte financie.

Formát vstupu

Na prvom riadku vstupu sa nachádza číslo n – počet križovatiek. Na nasledujúcich n riadkoch sú vymenované jednotlivé križovatky. Na každom riadku sú súradnice $1 \leq x_i, y_i \leq 10^9$: zemepisné súradnice jednotlivých križovatiek.

Formát výstupu

Na výstup vypíšete navrhnutú diaľničnú sieť. V prvom riadku vypíšete číslo H : počet západo-východných diaľnic.

Potom vypíšete H riadkov. Na každom riadku vypíšete štyri čísla $1 \leq x_i, y_i, x'_i, y'_i \leq 10^9$, ktoré reprezentujú západo-východnú diaľnicu. Musí platiť, že $y_i = y'_i$.

V ďalšom riadku vypíšete číslo V : počet severo-južných diaľnic. Potom vypíšete V riadkov. V každom riadku vypíšete štyri čísla $1 \leq x_i, y_i, x'_i, y'_i \leq 10^9$, ktoré reprezentujú severo-južnú diaľnicu. Musí platiť, že $x_i = x'_i$.

Hodnotenie

Je 8 sád vstupov. Platia v nich nasledovné obmedzenia:

Sada	1	2	3	4	5	6	7	8
$0 \leq n \leq$	6	6	16	16	100	10	1 000	1 000
$0 \leq x_i, y_i \leq$	6	10^9	16	10^9	100	10^9	1 000	10^9

Príklad:

vstup

4
2 1
2 3
1 2
3 2

výstup

3
1 1 2 1
1 2 3 2
1 3 2 3
4
1 2 1 2
3 1 3 3
2 1 2 1
2 3 2 3

Všimnite si, že viacero z diaľnic už nepokračuje mimo križovatkú.

V diaľničnej sieti však musia byť, keďže v každej križovatke sa musia križovať diaľnice.